

# FOPRA - 79 Röntgencomputertomographie

Augustin Lösch, Matthias Quintern, Lukas Bauer

Dezember 2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>1</b>
2.1	Interaktion von Röntgenstrahlung mit Materie . . . . .	1
2.2	Computertomographie . . . . .	1
2.2.1	Radon-Transformation . . . . .	1
2.2.2	Zentralschnitt-Theorem . . . . .	1
2.2.3	Gefilterte Rückprojektion . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung und Auswertung</b>	<b>2</b>
4.1	Weiß- und Dunkelbild . . . . .	2
4.2	Tomografischer Scan . . . . .	2
4.2.1	Rotationsachse . . . . .	2
4.2.2	Flußkorrektur . . . . .	3
4.2.3	Strahlgeometrie . . . . .	4
4.2.4	3D-Rekonstruktion . . . . .	4
4.3	Artefakte . . . . .	4
4.3.1	Rekonstruktion mit limitiertem Winkelbereich . . . . .	4
4.3.2	Rekonstruktion mit großen Winkelschritten . . . . .	5
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>6</b>

# 1 Einführung

Ziel dieses Praktikums ist es, einen Einblick in die Welt der Röntgencomputertomographie-Forschung zu gewinnen und in diesem Kurs die Hauptbestandteile einer Überraschungs-Ei Probe anhand des CT-Experiments zu bestimmen.

## 2 Theorie

### 2.1 Interaktion von Röntgenstrahlung mit Materie

Trifft ein Spektrum polychromatischer Röntgenstrahlen auf eine Probe inhomogener Materie, reagieren sie gemäß dem Lambert-Beerschen Gesetz [1]:

$$I(d) = \int_0^{E_{max}} I(0, E) \cdot \exp\left(-\int_0^d \mu(E, s) ds\right) dE, \quad (1)$$

mit der Strahlintensität  $I$ , der Strahlenergie  $E$ , der Materialdicke  $d$  und dem Massenschwächungskoeffizienten  $\mu$ . Der Massenschwächungskoeffizient ist materialabhängig [1]:

$$\mu = \rho \frac{N_A}{A} \sigma_{total}, \quad (2)$$

dabei ist  $\rho$  die Massendichte,  $A$  die Ordnungszahl,  $N_A$  die Avogadro-Konstante und  $\sigma_{total}$  der Streuquerschnitt.

Hat man, wie im Fall der Röntgencomputertomographie, keine spektrale Informationen sondern nur Gesamtintensitäten kann die Spektralkomponente weggelassen werden. Damit erhalten wir aus dem Exponenten des Lambert-Beerschen Gesetz (1) das **Linienintegral**  $p(d)$  [1]:

$$p(d) = -\ln\left(\frac{I(d)}{I(0)}\right) = \int_0^d \mu(s) ds, \quad (3)$$

wobei der Massenschwächungskoeffizient hier als energieunabhängig angenommen wird.

### 2.2 Computertomographie

Ziel der Computertomographie ist die Konstruktion von Schnittbildern einer Probe. Dafür werden Linienintegrale aus verschiedenen Richtungen aufgenommen, aus welchen mit einem geeigneten Algorithmus die räumliche Verteilung des Massenschwächungskoeffizienten erhalten werden kann.

#### 2.2.1 Radon-Transformation

Das Problem lässt sich durch die **Radon-Transformation** beschreiben. Diese bestimmt die Linienintegrale der Objektfunktion  $f(x, y)$ , welche in diesem Fall dem zweidimensionalen Massenschwächungskoeffizienten  $\mu(x, y)$  entspricht, entlang aller Geraden in einer Ebene [1]:

$$p_\theta(r) = \int_0^d f(r, s) ds = \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta - y \sin \theta - r) dx dy, \quad (4)$$

wobei  $\delta$  die Delta-Distribution ist und Polarkoordinaten verwendet werden.

#### 2.2.2 Zentralschnitt-Theorem

Bei der Computertomographie sind die Linienintegrale bekannt und man möchte die Objektfunktion bestimmen. Es muss also die Radon-Transformation rücktransformiert werden.

Dafür wird das **Zentralschnitt-Theorem** benötigt. Dieses besagt, dass die eindimensionale Fouriertransformation einer Projektion  $p(\theta, r)$  das gleiche ist wie die zweidimensionale Fouriertransformation  $F(u, v)$  der Objektfunktion  $f(x, y)$  unter dem selben Winkel  $\theta$  [1]:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta, r) e^{-2\pi i \omega r} dr, \quad (5)$$

wobei  $u = \omega \cos \theta$  und  $v = -\omega \sin \theta$ .

### 2.2.3 Gefilterte Rückprojektion

Die Gefilterte Rückprojektion - kurz **FBP** (*filtered back projection*) - ist der Algorithmus, der in diesem Versuch zur Bildkonstruktion verwendet wird. Die Objektfunktion wird als inverse Fouriertransformation von  $F(u, v)$  geschrieben und das Zentralschnitt-Theorem genutzt [1]:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \exp(2\pi i(ux + vy)) \, dudv = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\theta, \omega) \exp(2\pi i\omega(x \cos \theta - y \sin \theta)) |\omega| d\omega d\theta, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei  $|\omega|d\omega d\theta$  aus der Jakobi-Determinante der Koordinatentransformation kommt.

Der Faktor  $|\omega|$  dient hier als sogenannter **Ram-Lak Filter** und korrigiert den Frequenzbereich. Die Daten werden in Polarkoordinaten im Frequenzraum gemessen, was dazu führt, dass niedrige Frequenzen häufiger abgetastet werden als hohe Frequenzen.

## 3 Experimenteller Aufbau

Der Aufbau des Versuches umfasst eine Röntgenröhre, einen Röntgendetektor und einer rotierenden Plattform für die Probe, welche sich alle in einem abschirmenden Kasten befinden. Die Röhre und der Detektor können von jeweils von einem Computer gesteuert werden, der Detektor wird über ein Jupyter-Notebook eingestellt und ausgewertet.

## 4 Durchführung und Auswertung

Also Probe haben wir ein vollständiges, noch verpacktes Überraschungsei verwendet. Die Röntgenröhre wurde auf 60 kV und 0,5 mA eingestellt.

### 4.1 Weiß- und Dunkelbild

Zuerst werden ein Dunkelbild (Röntgenröhre aus) und ein Weißbild (Röntgenröhre an) über 10 s aufgenommen, bei beiden befindet sich keine Probe zwischen dem Detektor und der Röhre. Diese Bilder dienen später zur Korrektur der Daten, da man mit diesen etwaige Eigenheiten des Detektors korrigieren kann.

### 4.2 Tomografischer Scan

Beim tomografischen Scan werden Bilder bei verschiedenen Winkeln der Probenplattform aufgenommen. Die minimale Anzahl  $N$  der Bilder folgt aus dem Nyquist-Theorem:  $N \geq \frac{\pi}{2} \cdot n_{\text{pixel}}$ , wobei  $n_{\text{pixel}}$  die Breite des Objects in Pixeln ist. In unserem Fall teilen nehmen wir 950 Bilder im  $360^\circ$  Bereich, also im Abstand von  $0,379^\circ$ .

#### 4.2.1 Rotationsachse

Bevor wir das Objekt rekonstruieren, muss die Rotationsachse ermittelt werden. Dafür betrachtet man im Sinogram (Bild 1a) das Extremum einer Kurve bei zwei gegenüberliegende Winkel (z.B.  $0$  und  $180^\circ$ ), der Mittelpunkt zwischen den beiden ist dann die Rotationsachse. Für alle weiteren Schritte muss das Sinogram so zugeschnitten werden, dass die Rotationsachse in der Mitte liegt.

Grafik 4b zeigt die Rekonstruktion ohne Korrektur der Rotationsachse. Man sieht, dass alle Konturen doppelt dargestellt sind, was daran liegt, dass die falsche Rotationsachse verwendet wird. Mit der richtigen Rotationsachse erhält man Grafik 4c. Die Dopplungen sind dort verschwunden.

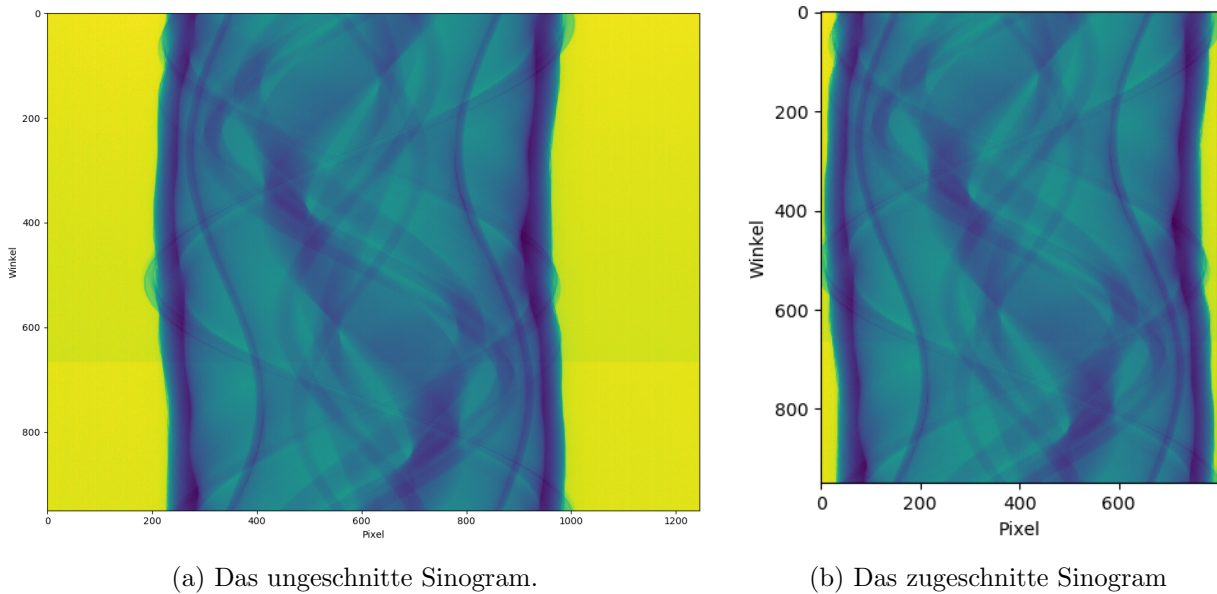


Figure 1: Das Sinogramm für eine Querschnitt der Probe (Überraschungsei). Es zeigt die Projektionen für alle Winkel.

#### 4.2.2 Flußkorrektur

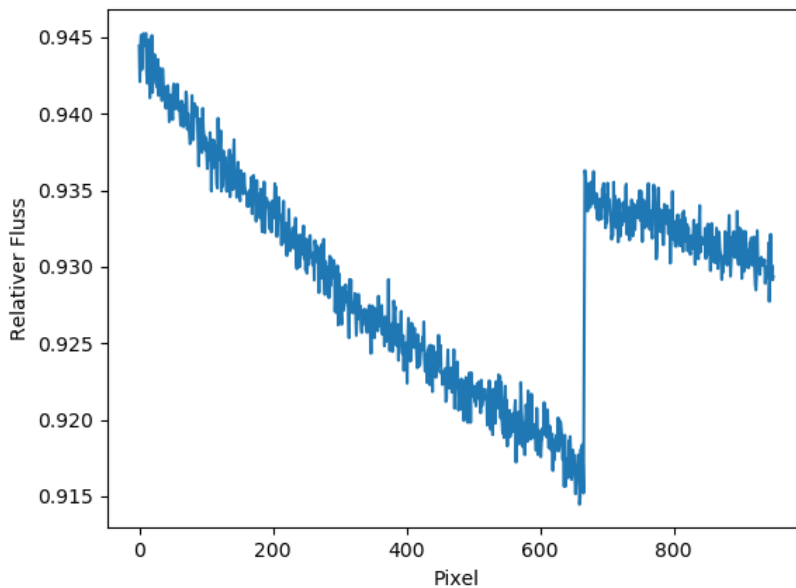


Figure 2: Relativer Fluß für jede Projektion an einem Pixel außerhalb des Objekts. Die y-Achse zeigt den Fluß in willkürlichen Einheiten für jede aufgenommene Projektion (x-Achse). Die Fluß der Röntgenröhre unterliegt Schwankungen, weshalb er hier nicht konstant ist.

Da die Intensität der Röntgenstrahlung schwankt, ist der Fluß in jeder Projektion unterschiedlich. Um die Flußschwankung zu korrigieren, bestimmt man den relativen Fluß für jede Projektion und normalisiert die Projektion an diesem Fluß. Die relative Flußschwankung erhält man, indem man einen Bereich (z.B. ein Pixel) betrachtet, der in jeder Projektion außerhalb des Objekts liegt. Bei einer perfekten Röntgenröhre wäre der Fluß in diesem Bereich dann konstant, daher kann man so Abweichungen feststellen. Bild 2 zeigt die Flußschwankung bei einem Pixel außerhalb des Objekts. Normalisiert man in jeder Projektion den Fluß, erhält man Bild 4d.

### 4.2.3 Strahlgeometrie

Bisher wurde angenommen, dass die Strahlung parallel ist. Das ist aber nicht der Fall, die Strahlung ist kegelförmig von der Röntgenröhre aus. Mit den Abmessungen des Versuchs kann auch dies korrigiert werden und man erhält Bild 4e. Die Kanten am Rand sind wesentlich schärfer. In der Mitte sind keine großen Änderungen zu sehen, da hier die Annahme von parallelen Strahlen noch eher stimmt als am Rand und daher keine großen Fehler verursacht.

### 4.2.4 3D-Rekonstruktion

Die korrigierten Bilder lassen sich jetzt mit einem geeigneten Programm zu einer 3D-Rekonstruktion des Objekts zusammenfügen. Bild 3 zeigt die Rekonstruktion des Überraschungseis, dass in einem PET-Flaschendeckel steht. Beim Scannen wurde nur der untere Teil aufgezeichnet. Das Plastik in der hohlen Schokolade ist deutlich erkennbar. Zudem sind Räder mit einer Achse erkennbar, was darauf hin deutet dass sich in diesem Ü-Ei ein Fahrzeug befindet. Ein anschließender Versuch hat diesen Verdacht bestätigt. Die Artefakte an den Rändern kommen daher, dass das Sinogramm etwas zu stark zugeschnitten wurde. Die schwarzen Ringe die im Bild zu sehen sind, können auf tote Pixel zurückgeführt werden.

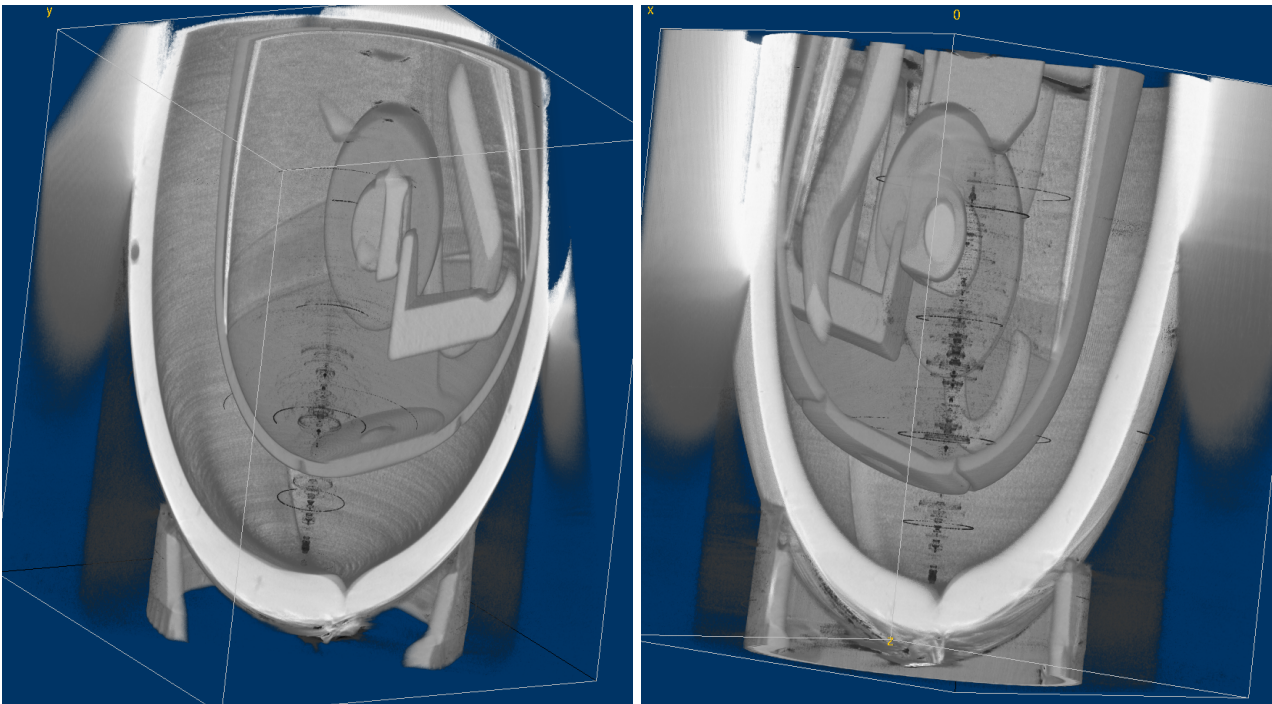


Figure 3: 3D-Rekonstruktion des Überraschungseis, erstellt mit Fiji.

## 4.3 Artefakte

### 4.3.1 Rekonstruktion mit limitiertem Winkelbereich

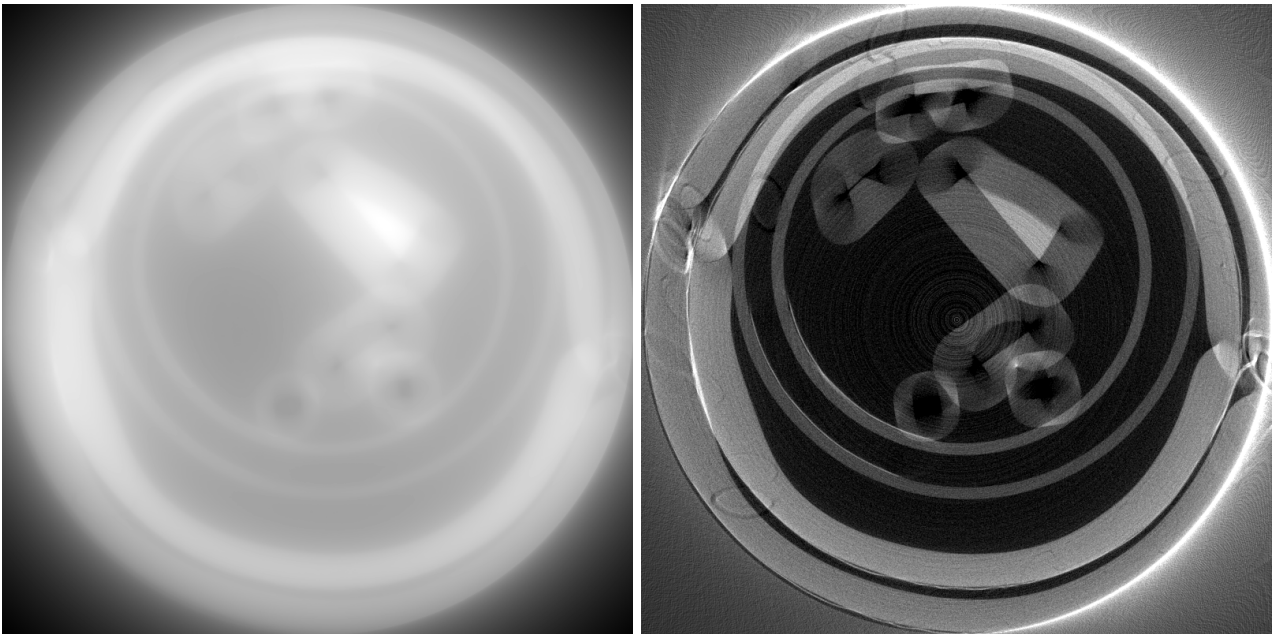
Für eine vollständige Rekonstruktion des Objekts müssen Projektionen in einem Winkelbereich von  $180^\circ$  aufgenommen werden. Bild 5a zeigt eine Rekonstruktion bei nur ein Winkelbereich von  $90^\circ$  verwendet wurde. Man sieht, dass die Information über Quadrant 2 und 3 fehlen. Man kann hier sehr schön die Arbeitsweise der gefilterten Rückprojektion erkennen: Die Projektionen werden über das Bild "geschmiert", aus der Überlagerung entsteht dann die tatsächliche Form. Die geraden Linien im 2. und 3. Quadranten entstehen durch dieses Verschmieren.

### 4.3.2 Rekonstruktion mit großen Winkelschritten

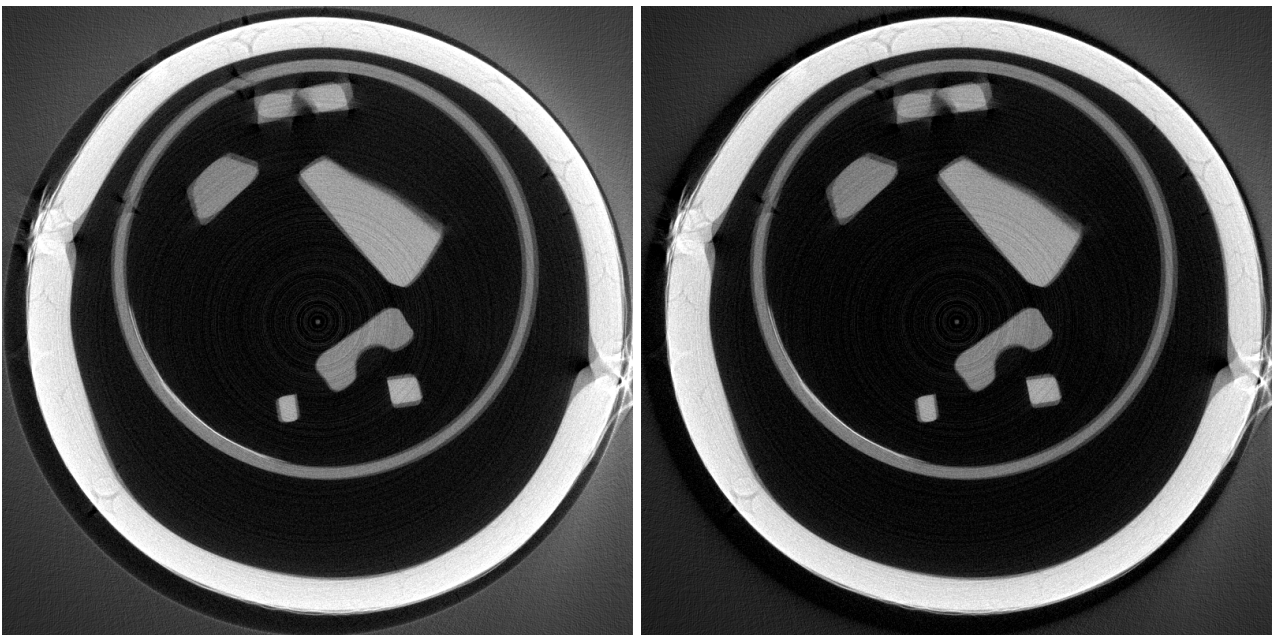
Um besser verstehen zu können, wie sich unterschiedliche Messschritte auf das Rekonstruktionsresultat auswirken, wurde auch eine Rekonstruktion mit größeren Winkelschritten durchgeführt, wobei von den 950 nur jedes zehnte Bild zur Rekonstruktion verwendet wurde. Aufgrund der großen Messschritte werden Wellenartefakte sichtbar. Die grundlegende Form der gescannten Objekte kann aber immer noch gut aufgelöst werden. Die Artefakte stammen daher, da die Bedingung des Nyquist-Shannon-Abtasttheorems nicht erfüllt ist. Das hat zur Folge, dass das Signal im Fourier-Raum überlappt und so zu Artefakten im Bild führt.



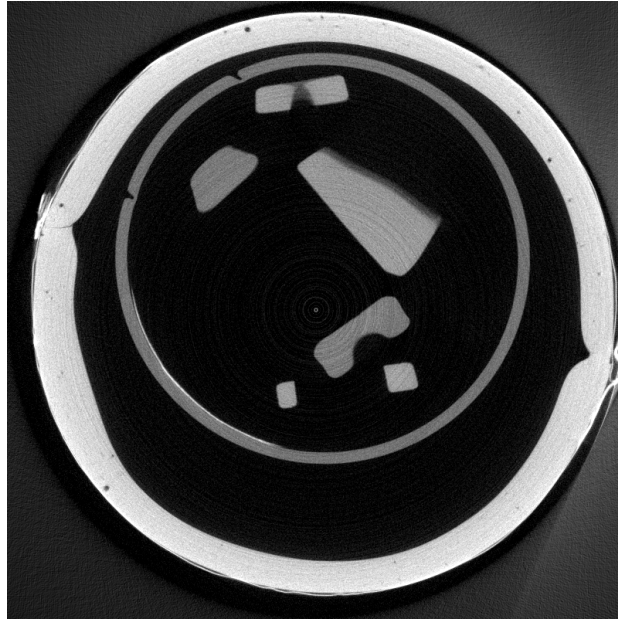
## A Anhang



(a) Das rekonstruierte Bild. Es ist verschwommen, da wie in Abschnitt 2.2.3 erklärt niedrige Frequenzen stärker in das Bild eingehen, hohe Frequenzen jedoch genauere Informationen enthalten und deshalb genauere Kanten erzeugen als niedrige.  
(b) Bild 4a mit Ram-Lak Filter, der höhere Frequenzen stärker gewichtet als niedrige. Die Konturen sind deutlich besser erkennbar und die Kanten schärfer als in Bild 4a, jedoch sind sie doppelt zu sehen, da die Rotationsachse nicht in der Mitte des Sinogramms liegt.

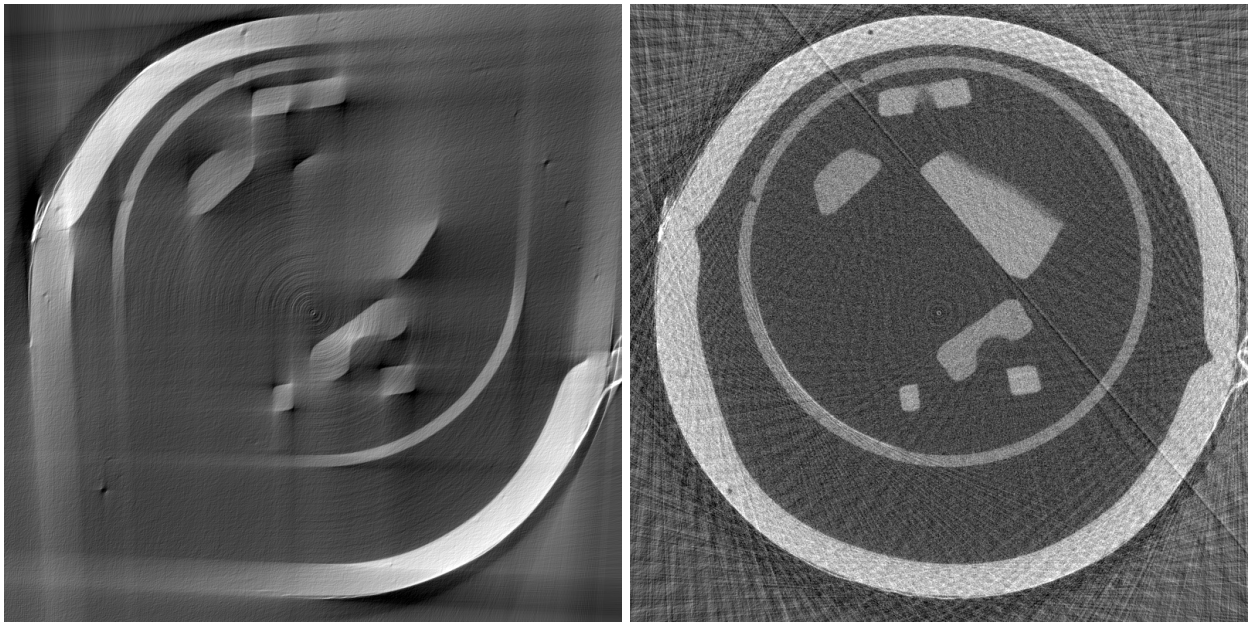


(c) Bild 4b mit korrigierter Rotationsachse. Für die Rekonstruktion muss die Rotationsachse in der Mitte des Sinogramms sein. Für die Korrektur wird das Sinogramm 1a so zugeschnitten, dass dies der Fall ist (Bild 1b).  
(d) Bild 4c mit korrigierter Flußschwankung. Die Färbung der einzelnen Materialien ist jetzt konstanter und damit der Kontrast besser, was vor allem an dem hellgrauen "Schein" außerhalb des Eis erkennbar ist. Dieser ist deutlich schwächer als in Bild 4c.



(e) Bild 4d mit korrigierter Strahlform. Bisher wurde von parallelen Strahlen ausgegangen, jedoch ist der Strahl von der Quelle aus kegelförmig. Die Kanten sind jetzt wesentlich schärfer als in Bild 4d. Zudem sind jetzt Luft einschließungen in der Schokolade (schwarze Punkte im äußeren Ring) erkennbar.

Figure 4: Das rekonstruierte Bild mit verschiedenen Korrekturen



(a) Der ursprüngliche Scan (Bild 4) war  $360^\circ$ , bei diesem Bild wurde aber nur der  $0-90^\circ$  Bereich genutzt. Im oberen rechten und unteren linken Viertel erkennt man gerade Linien anstatt der erwarteten Kreisform, da diese Viertel bei einem  $90^\circ$  Scan gar nicht erfasst werden. Für ein vollständiges Bild wären mindestens  $180^\circ$  notwendig. Das dennoch gerade Linien zu sehen sind, liegt an der gefilterten Rückprojektion.

(b) Bei dieser Messung wurde nur jede zehnte Messung genommen, anstatt  $360^\circ/950 \approx 0,38^\circ$  pro Schritt beträgt die Schrittweite  $3,8^\circ$ .

Figure 5: Das rekonstruierte Bild mit verschiedenen Limitationen



## References

- [1] Manuel Viermetz Lorenz Birnbacher and Johannes Hammel. X-ray computed tomography, FOPRA / Advanced Lab Course.