



# Ausarbeitung zu "Pohlsches Rad"

Anfängerpraktikum Teil 1  
Technische Universität München

Clara Donat, Matthias Quintern  
Kurs 2, Gruppe 6, Team 11

13. Januar 2021

## Einleitung

In diesem Versuch wird das Verhalten eines speziellen Drehpendels untersucht, nämlich das des Pohlschen Rads. Dabei wird zuerst mittels einer gedämpften freien Schwingung die Eigenfrequenz und die Dämpfungskonstante bestimmt. Anschließend ermittelt man die Resonanzfrequenz mithilfe erzwungener Schwingungen mit verschiedenen Anregungsfrequenzen.

**Hinweis:** Aufgrund der Corona-Pandemie wurde dieser Versuch virtuell durchgeführt, alle Messdaten stammen aus Moodle.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Freie gedämpfte Schwingung . . . . .	2
1.2 Resonanzkurve . . . . .	2
<b>2 Experimentelles Vorgehen</b>	<b>3</b>
2.1 Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante . . . . .	4
2.2 Resonanzfrequenz . . . . .	4
<b>3 Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>4</b>
3.1 Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante . . . . .	4
3.2 Resonanzfrequenz . . . . .	5
<b>4 Anhang</b>	<b>6</b>
4.1 Fehlerrechnung . . . . .	6
4.1.1 Bestimmung der Unsicherheit aus Matlab-Fits . . . . .	6
4.1.2 Dämpfungskonstante . . . . .	6
4.1.3 Resonanzkurve . . . . .	6
<b>5 Literaturverzeichnis</b>	<b>6</b>

# 1 Grundlagen

Im Folgenden werden nur lineare Systeme betrachtet, deren Bewegungsgleichung eine lineare Differentialgleichung ist.

## 1.1 Freie gedämpfte Schwingung

Führt ein nicht angetriebenes Pendel eine gedämpfte Schwingung um seine Ruhelage aus, nennt man diese die *gedämpfte Eigenschwingung* des Systems. Die allgemeine Bewegungsgleichung der gedämpften Eigenschwingung [1] lautet

$$\Theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + k\varphi = 0. \quad (1)$$

Dabei ist  $\Theta$  das Trägheitsmoment des Pendels,  $\varphi$  die Auslenkung,  $\gamma$  das Dämpfungsmoment und  $k$  das rücktreibende Moment der Feder. Für das im Versuch verwendete Pendel macht es Sinn, die Dämpfungskonstante  $\lambda = \gamma \cdot \Theta/2$  einzuführen. Dabei wird zudem nur der Schwingungsfall betrachtet, also derjenige, der bei schwacher Dämpfung des Pendels eintritt:  $\lambda^2 < k/\Theta$ . Für diesen Fall erhält man als Lösung für die Bewegungsgleichung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \exp[i(\omega_d t + \delta)], \quad (2)$$

wobei  $\varphi_0$  die Ruhelage des Systems,  $\delta$  die Phasenverschiebung und  $\omega_d = \sqrt{\frac{k}{\Theta} - \lambda^2}$  die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist. In Realität entspricht die Lösung dem Realteil, also

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega_d t + \delta). \quad (3)$$

Der Kosinus-Term beschreibt die Schwingung und der Exponentialterm die Dämpfung, also die Einhüllende der Amplitude.

Charakterisiert wird diese Schwingung durch die Abklingzeit  $\tau$

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \quad (4)$$

und die Eigenfrequenz  $f$

$$f = \frac{\omega_d}{2\pi}. \quad (5)$$

Die sich ergebende Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt.

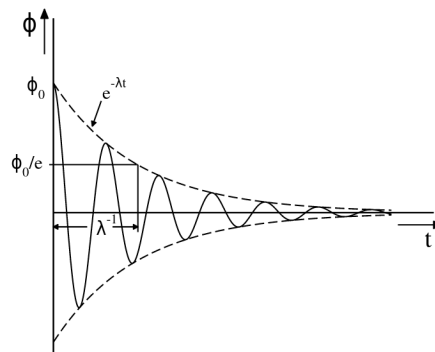


Abbildung 1: Realteil der Lösung der Bewegungsgleichung für den Fall der schwachen Dämpfung [1]

## 1.2 Resonanzkurve

Wirkt ein externer Antrieb ein zusätzliches Drehmoment auf das Pendel aus, ändert sich Gleichung 1 zu:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + k\varphi = M_0 \cdot \sin(\omega t). \quad (6)$$

Das Einsetzen der partikulären Lösung

$$\varphi_p(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega t - \delta) \quad (7)$$

in Formel 6 ermöglicht die Bestimmung der Amplitudenfunktion  $A(\omega)$ [1] zu

$$A(\omega) = \frac{\frac{M_0}{\Theta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \quad (8)$$

wobei  $\omega$  die Antriebsfrequenz und  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\Theta}}$  die Eigenfrequenz des frei schwingenden Pendels bezeichnen. Gleichung 8 nimmt bei der sogenannten Resonanzfrequenz

$$\omega_R = \sqrt{\frac{k}{\Theta} - 2\lambda^2} \quad (9)$$

ihren Maximalwert an, welchen man folgendermaßen bestimmen kann:

$$A(\omega_R) = \frac{M_0}{2\Theta \cdot \lambda \cdot \omega_d}. \quad (10)$$

Betrachtet man den graphischen Verlauf von  $A(\omega)$  in Abbildung 2, stellt man fest, dass die Resonanzkurve bezüglich  $\omega_R$  nicht symmetrisch ist.

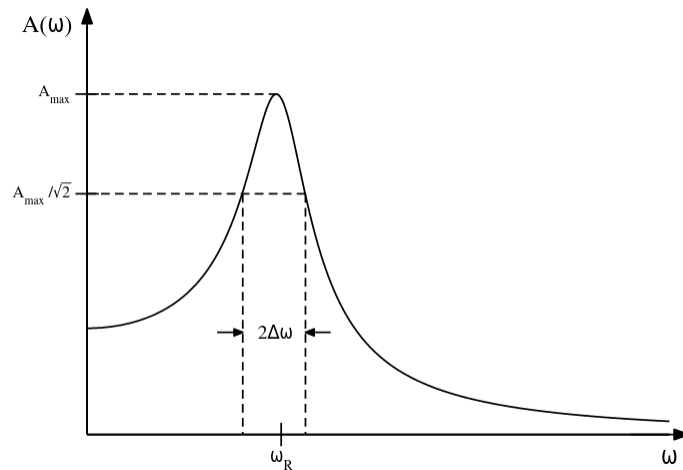


Abbildung 2: Resonanzkurve mit eingezeichneter Halbwertsbreite[1]

Die sogenannte *Halbwertsbreite*  $\Delta\omega$  um  $\omega_R$  errechnet sich aus der Hälfte der Differenz jener  $\omega$ -Werte, die bei  $\frac{A(\omega_R)}{\sqrt{2}}$  angenommen werden. Für eine kleine Dämpfungskonstante  $\lambda$  gilt zudem folgende Beziehung:

$$\Delta\omega = \lambda. \quad (11)$$

Aus Gleichung 11 lässt sich ablesen, dass mit größer/kleiner werdender Dämpfung die Halbwertsbreite ebenfalls größer/kleiner wird. Zudem wächst die Lebensdauer der Schwingung umso mehr, je kleiner  $\lambda$  wird.

## 2 Experimentelles Vorgehen

Das bei diesem Versuch verwendete Pohlsche Rad ist eine spezielle Form des Drehpendels, welches aus einer drehbaren Kupferscheibe zusammengesetzt ist. Die Ruhelage des Pendels wird durch eine Spiralfeder festgelegt und seine Auslenkung kann an einer kreisförmigen Skala abgelesen werden. Über die

Regelung des Stroms an einer Wirbelstrombremse können unterschiedlich starke Dämpfungsparameter gewählt werden.

Der Versuch wurde nicht selbst durchgeführt; alle Daten wurden stammen aus dem "Virtuellen Versuch: POR" Moodle Kurs des Praktikums (mit  $I = 0.35 \text{ A}$  als Dämpfungsgstrom)[2]. Für Zeitmessungen werden die Videos auf 0,5-facher Geschwindigkeit ausgewertet, um ein genaueres Ergebnis zu erzielen. Die gemessene Zeit muss anschließend natürlich mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  korrigiert werden.

## 2.1 Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante

Im bereitgestellten Video zum ersten Versuchsteil wurde mit einer Stoppuhr die Zeit gemessen, welche für 10 Schwingungen benötigt wird. Zusätzlich wird bei jeder Schwingung die Maximalamplitude des Pendels abgelesen.

## 2.2 Resonanzfrequenz

Möchte man erzwungene Schwingungen untersuchen, so kann das Drehpendel über eine Getriebestange und einen Exzenter durch einen Schrittmotor angetrieben werden, dessen Drehfrequenz von einem Signalgenerator geregelt wird.

Nachdem man für verschiedene Frequenzen die Periodendauer der Anregung gestoppt hat, wird bei jedem Teilvideo die rechte und linke Maximalamplitude des Pendels abgelesen. Mittelt man diese, erhält man eine maximale Amplitude ohne Offset.

# 3 Ergebnisse und Diskussion

## 3.1 Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante

Die Periodendauer  $T$  lässt sich bestimmen über

$$T = \frac{T_{10}}{10}, \quad (12)$$

wobei  $T_{10}$  die tatsächlich gemessene Zeit ist. Mit  $T_{10} = 20,205 \text{ s}$  ergibt sich  $T = 2,02 \pm 0,03 \text{ s}$ . Die Eigenkreisfrequenz erhält man mit  $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$  zu  $\omega_d = 3,210 \pm 0,093 \text{ s}^{-1}$ . Die Eigenfrequenz ist daher  $f = 0,511 \pm 0,015 \text{ Hz}$ .

Als nächstes soll die Dämpfungskonstante  $\lambda$  bestimmt werden. Dafür wird zu jeder vollen Schwingung die Maximalamplitude bestimmt. Der Dämpfungsterm der Schwingung wird beschrieben durch

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t), \quad (13)$$

dabei ist  $A_0$  die Maximalamplitude. Betrachtet man immer zwei aufeinanderfolgende Amplituden  $A_i$  und  $A_{i+1}$ , lässt sich durch Umstellen von 13 für jede Periode die Dämpfungskonstante bestimmen. Die umgeformte Gleichung lautet dann

$$\lambda_i = -\frac{\ln\left(\frac{A_{i+1}}{A_i}\right)}{T}. \quad (14)$$

Aus dem Video wurden für 14 Schwingungen die Amplituden genommen. Demnach bekommt man 13 Werte für  $\lambda$ . Am Anfang des Versuchs ist das Pendel in der Ruhelage, welche sich bei 1 Skalenteil = 0,2 Einheiten befindet. Daher wurden alle gemessenen Amplituden um den Offset  $A_o = 0,2$  korrigiert. Der endgültige Wert für die Dämpfungskonstante ist dann der gewichtete Mittelwert:  $\bar{\lambda} = 0,119 \pm 0,014$ .

Daraus kann mithilfe von Gleichung 4 die Abklingzeit zu  $\tau = 8.40 \pm 0.97$  berechnet werden.

Um die Werte zu überprüfen, werden diese auch aus den Cassy-Lab Daten ermittelt, die zusätzlich bereit gestellt wurden. Die Daten enthalten Amplitudenwerte in Abhängigkeit von der Zeit. Die Schwingung wird durch Gleichung 3 beschrieben, daher wurden die Daten anhand dieser Funktion mit Fitparametern  $\lambda$ ,  $\omega_d$  und  $\delta$  gefittet.



Zudem soll noch die Abklingzeit  $\tau$  bestimmt werden. Diese lässt sich wie oben mit  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  berechnen. Die erhaltenen Werte für  $\omega_d$ ,  $\lambda$  und  $\tau$  für die drei Messreihen und die aus dem Video ermittelten Daten sind in Tabelle 1 aufgetragen. Wie man sieht, stimmen alle Werte innerhalb ihrer Unsicherheiten überein. Die Unsicherheiten der eigenen Daten sind jedoch deutlich größer als die der Cassy-Lab Messreihen. Das kommt daher, dass bei der Auswertung aus dem Video deutlich weniger Datenpunkte entnommen wurden sind.

	$\omega$ [s <sup>-1</sup> ]	$\lambda$ [s <sup>-1</sup> ]	$\tau$ [s]
Eigene Daten	$3.120 \pm 0.093$	$0.119 \pm 0.014$	$8.40 \pm 0.97$
Cassy-Lab 1	$3.120 \pm 0.002$	$0.119 \pm 0.004$	$8.40 \pm 0.27$
Cassy-Lab 2	$3.119 \pm 0.004$	$0.120 \pm 0.004$	$8.33 \pm 0.25$
Cassy-Lab 3	$3.121 \pm 0.004$	$0.119 \pm 0.004$	$8.38 \pm 0.27$

Tabelle 1: Kreisfrequenz, Dämpfungskonstante und Abklingzeit. Eigene Werte und Cassy-Lab Werte

### 3.2 Resonanzfrequenz

Mittelt man jeweils die notierten Werte für die maximale linke und rechte Auslenkung des Pendels für eine bestimmte Anregungsfrequenz, erhält man Ergebnisse für die Amplituden ohne Offset. Aus der Messung der Periodendauer  $T$  lässt sich mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (15)$$

die zugehörige Kreisfrequenz  $\omega$  berechnen. Trägt man die Maximalamplituden gegen  $\omega$  auf, ergibt sich folgender Graph:

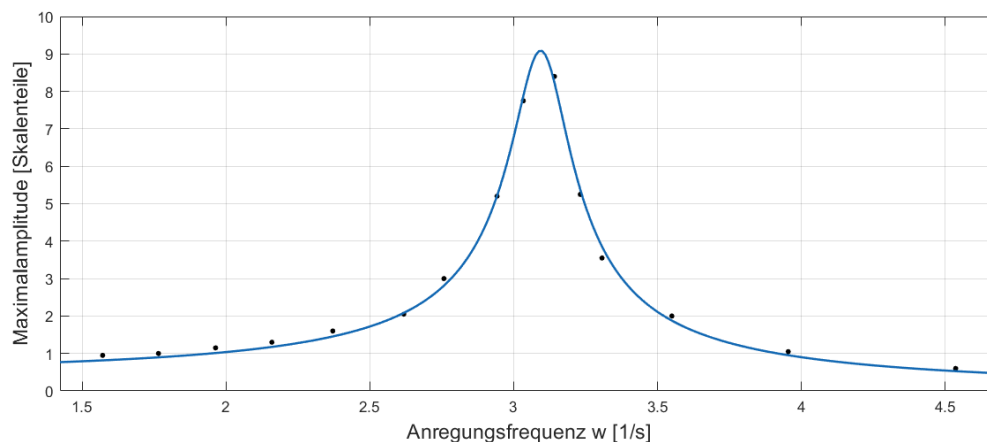


Abbildung 3: Resonanzkurve des Drehpendels

Hierbei wurde die Theoriefunktion 8 zum Fitten der Daten mit dem Fitparameter  $\omega$  verwendet. Um die Resonanzfrequenz, bei der das Pendel den höchsten Ausschlag zeigt, exakt zu bestimmen, leitet man Gleichung 8 nach  $\omega$  ab und setzt sie anschließend gleich Null.

Auflösen nach  $\omega$  ergibt  $\omega_R = 3,094 \pm 0,012 \text{ s}^{-1}$ .

Die Halbwertsbreite erhält man, indem man den Wert von  $\omega_R$  in 8 einsetzt. Anschließend teilt man das Ergebnis durch  $\sqrt{2}$  und löst die Funktionsgleichung  $A(\omega)$  nach  $\omega$  auf. Die Differenz der sich dabei ergebenden zwei positiven Lösungen ist gleich der doppelten Halbwertsbreite. Diese ergibt sich numerisch zu  $\Delta\omega = 0,103 \pm 0,017 \text{ s}^{-1}$ .

Laut Gleichung 11 sollte  $\Delta\omega$  mit  $\lambda$  übereinstimmen, da eine schwache Dämpfung vorliegt. Tatsächlich

erhält man durch den Funktionenfit in Matlab den Wert  $\lambda = 0,103 \pm 0,017$ . Auch der im ersten Versuchsteil experimentell errechnete Wert von  $\lambda = 0,119 \pm 0,014$  stimmt innerhalb der Unsicherheiten mit  $\Delta\omega$  überein. Die Beziehung 11 ist also erfüllt.

## 4 Anhang

Da der Versuch virtuell war, wurde kein Versuchsprotokoll angefertigt. Die gemessenen Werte werden daher als Tabelle beigelegt. Da .ods und .zip als Abgabe nicht erlaubt ist, ist wurde die Tabelle (POR\_Donat\_Quintern.ods) hier hochgeladen:

[http://users.ph.tum.de/ge75yag/praktikum/POR\\_Donat\\_Quintern.ods](http://users.ph.tum.de/ge75yag/praktikum/POR_Donat_Quintern.ods)

### 4.1 Fehlerrechnung

Für alle Zeitmessungen wird ein fester Fehler von  $u(t) = 0,6$  s angenommen. Dieser entsteht aus einer zweifachen menschlichen Reaktionszeit von  $t_m = 0,3$  s, jeweils einmal beim Starten und Stoppen der Uhr. Für alle Amplitudenwerte wird ein Ablesefehler von  $u(A) = 0,2$  (1 Skalenteil) verwendet.

#### 4.1.1 Bestimmung der Unsicherheit aus Matlab-Fits

Matlab gibt Fitparameter mit einem 95% Konfidenzintervall  $[x - \sigma, x + \sigma]$  aus. Hierbei ist  $x$  der Fitparameter und  $\sigma$  die Standardabweichung. Die Unsicherheit von  $x$  lässt sich dann berechnen über

$$u(x) = 2 \cdot \sigma. \quad (16)$$

#### 4.1.2 Dämpfungskonstante

Die Unsicherheit der einzelnen  $\lambda_i$  lässt sich leicht aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnen. Für die Unsicherheit des gewichteten Mittelwerts wird dann die innere  $u_{int}$  bzw. äußere Unsicherheit  $u_{ext}$  berechnet und das Maximum für  $u(\lambda)$  verwendet. Man erhält  $u(\bar{\lambda}) = u_{int}(\bar{\lambda}) = 0,014 \text{ s}^{-1}$  und  $u_{ext}(\bar{\lambda}) = 0,004 \text{ s}^{-1}$ . Dass die äußere Unsicherheit kleiner ist als die innere zeigt auch, dass alle auftretenden Unsicherheiten ausreichend berücksichtigt wurden.

#### 4.1.3 Resonanzkurve

Bei dem Versuchsteil zur Resonanzkurve erhält man die Unsicherheiten für die in Gleichung 9 benötigten Parameter aus Matlab zu  $u(\omega_0) = 0,012 \text{ s}^{-1}$  und  $u(\lambda) = 0,017$ . Diese werden anschließend in die Formel für die Gaußsche Fehlerfortpflanzung eingesetzt, um  $u(\omega_R) = 0,012 \text{ s}^{-1}$  und  $u(\Delta\omega) = 0,017 \text{ s}^{-1}$ .

## 5 Literaturverzeichnis

### Literatur

- [1] Fakultät für Physik. *Pohlsches Rad (POL)*. Technische Universität München. 23. Juni 2020. URL: <https://www.ph.tum.de/academics/org/labs/ap/ap1/POR.pdf>.
- [2] *Virtueller Versuch: POR, Dämpfungsstrom 0.35 A*. Technische Universität München. URL: <https://www.moodle.tum.de/mod/book/view.php?id=1417096&chapterid=8478>.